В. П. ПЛАТОНОВ
А. С. РАПИНЧУК

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

В. П. ПЛАТОНОВ, А. С. РАПИНЧУК

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1991

ББК 22.144
П37
УДК 512.74

Платонов В. П., Рапинчук А. С. **Алгебраические группы и теория чисел.** — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 656 с. — ISBN 5-02-014191-7.

Первое в мировой математической литературе систематическое изложение арифметической теории алгебраических групп. Представлены практически все основные результаты арифметической теории линейных алгебраических групп, полученные к настоящему времени. Изложение начинается с обзора необходимых сведений из теории алгебраических групп и алгебраической теории чисел, что делает книгу доступной неспециалистам. По ходу изложения формулируется ряд нерешенных проблем и гипотез, которые могут явиться стимулом для новых исследований в этой активно развивающейся области современной математики.

Для математиков разных специальностей — студентов, аспирантов и научных работников.

Ил. 4. Библиогр.: 551 наз.

Рецензент
доктор физико-математических наук *А. Н. Паршин*

П $\frac{1602040000-014}{053(02)-91}$ 28—90

ISBN 5-02-014191-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой первое в мировой математической литературе систематическое изложение теории, лежащей на стыке теории групп, алгебраической геометрии и теории чисел. Это направление исследований сравнительно недавно оформилось в самостоятельную область математики, которую часто называют арифметической теорией алгебраических (линейных) групп. В 1967 году в предисловии к своей книге «Основы теории чисел» А. Вейль писал: «Прокладывая курс своего корабля, я старался избегать арифметической теории алгебраических групп, это весьма интересный предмет, но он, очевидно, не созрел еще для изложения в книге».

У истоков арифметической теории линейных алгебраических групп лежат классические исследования по арифметике квадратичных форм (Гаусс, Эрмит, Минковский, Хассе, Зигель), структуре групп единиц полей алгебраических чисел (Дирихле), дискретным подгруппам групп Ли в связи с теорией автоморфных функций, топологией и кристаллографией (Риман, Клейн, Пуанкаре и др.). Но именно последние 20—25 лет были периодом ее чрезвычайно интенсивного развития. В эти годы была построена теория приведения для арифметических групп, изучены свойства групп аделей и решена проблема сильной аппроксимации, получены глубокие результаты о строении групп рациональных точек над локальными и глобальными полями, исследованы различные варианты локально-глобального принципа для алгебраических групп, в существенной степени решена конгруэнц-проблема для изотропных групп.

Даже из этого далеко не полного перечня основных достижений арифметической теории линейных алгебраических групп видно, что накоплен большой содержательный материал, представляющий значительный интерес для математиков разных специальностей. К сожалению, главные результаты здесь и по сей день доступны лишь в форме журнальных публикаций, хотя необходимость их обстоятельного изложения с единых позиций назрела уже давно. Однако появление соответствующей книги задерживалось, что в существенной мере объясняется трудностью монографического изложения теории из-за обилия глубоких результатов и синтетичности используемых методов, относящихся к алгебре, алгебраической геометрии, теории чисел, анализу и топологии. И вот, наконец, такая книга предлагается читателю.

Первые две главы имеют вводный характер и содержат основные результаты алгебраической теории чисел и теории алгебраических групп, широко используемые в последующих главах.

В третьей главе излагаются основные факты о строении алгебраических групп над локально компактными полями. Некоторые из них остаются справедливыми и в случае любого поля, полного относительно дискретного нормирования.

В четвертой главе представлено все наиболее существенное об арифметических группах, базирующееся на результатах А. Бореля и Хариш-Чандры.

Одним из основных инструментов исследования в арифметической теории алгебраических групп являются группы аделей, свойства которых изучаются в гл. V.

Центральное место в шестой главе, несомненно, занимает полное доказательство принципа Хассе для односвязных алгебраических групп, которое в окончательном виде публикуется впервые.

В седьмой главе исследуется сильная и слабая аппроксимация в алгебраических группах. В частности, приводится решение проблемы сильной аппроксимации и доказательство гипотезы Кнезера — Титса над локальными полями, полученные первым из авторов книги.

Под влиянием классических проблем о числе классов в роде квадратичных форм и о числе классов идеалов полей алгебраических чисел возникла необходимость в изучении чисел классов для произвольных алгебраических групп, определенных над числовыми полями. Основные результаты, полученные к настоящему времени, излагаются в гл. VIII. Большинство из них принадлежит авторам.

Девятая глава, посвященная группам рациональных точек, занимает особое место в книге по новизне и сложности результатов. В последние годы в этой области был достигнут значительный прогресс. В первую очередь здесь следует отметить работы Кнезера, Маргулиса, Платонова, Рапинчука, Прасада, Рагунатана и др. о нормальном строении групп рациональных точек анизотропных групп и мультипликативной арифметике тел, использующие весь арсенал арифметической теории алгебраических групп. Ряд результатов публикуется здесь впервые.

В заключительном параграфе этой главы приводится обзор новейших результатов по так называемой конгруэнц-проблеме.

Таким образом, в книге представлены (в разной степени) почти все основные результаты арифметической теории линейных алгебраических групп, полученные к настоящему времени. В то же время круг вопросов, связанных с конгруэнц-проблемой, заслуживает самостоятельного монографического изложения, и авторы намерены вернуться к этой теме в ближайшем будущем. Не затронута у нас и такая важная тема как когомологии арифметических групп. Тем не менее в книге содержится весь необходимый для этого подготовительный материал (за исключением некоторых фактов чисто топологического характера), так что заинтересованный читатель, после ознакомления с соответствующими разделами книги, сможет перейти к чтению весьма обширной литературы по когомологиям арифметических групп и их связям с теорией представлений.

Отметим, что для многих известных утверждений (особенно в гл. V, VI, VII, IX) мы даем новые доказательства, как правило, более концептуальные. В ряде мест эффективно используется геометрический подход к классификации представлений групп с конечным числом образующих.

По ходу изложения мы формулируем значительное число нерешенных проблем и гипотез, которые могут явиться стимулом для новых исследований в этой активно развивающейся области современной математики.

Большинство результатов, изложенных в книге, либо распространяется на случай алгебраических групп над глобальными полями положительной характеристики, либо имеет в этом случае свои аналоги. Во многих ситуациях это достигается путем незначительной модификации рассуждений, однако иногда связано с использованием других подходов и развитием принципиально новой техники. В целом приходится констатировать, что арифметическая теория алгебраических групп в положительной характеристике пока не обрела той стройности и завершенности, какая имеет место для случая полей алгебраических чисел. По этой причине мы приняли решение не уделять случаю положительной характеристики специальное внимание, ограничиваясь краткими комментариями библиографического характера.

На структуру книги и изложение многих ее результатов существенное влияние оказала обзорная статья В. П. Платонова «Арифметическая теория алгебраических групп», опубликованная в журнале «Успехи математических наук» (1982. № 3. С. 3—54).

При подготовке рукописи к печати большую помощь нам оказали О. И. Тавгень, Ю. А. Дракохруст, В. В. Беняш-Кривец, В. В. Курсов, И. И. Воронович. Особо следует отметить вклад В. И. Черноусова, который предоставил нам полное доказательство принципа Хассе для односвязных групп и затратил

немало времени на усовершенствование изложения в гл. VI. Всем им мы сердечно благодарны.

О нумерации: теоремы, леммы и предложения нумеруются отдельно в пределах каждой главы. При ссылках указывается сначала номер главы, а потом номер утверждения; например, ссылаясь на теорему 4.6, мы имеем в виду теорему 6 из гл. IV.

В. П. Платонов
А. С. Рапинчук