ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
33 (1969), 1211—1219

УДК 513.6

В. П. ПЛАТОНОВ

# ПРОБЛЕМА СИЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ И ГИПОТЕЗА КНЕЗЕРА — ТИТСА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП

Завершается исследование проблемы сильной аппроксимации в алгебраических группах. Существенное значение при этом имеет доказательство гипотезы Кнезера — Титса о простых односвязных группах над локально компактными полями.

## § 1. Введение и формулировка результатов

Пусть $k$ — поле алгебраических чисел, $v$ — произвольное нормирование поля $k$, $O_v$ — кольцо целых элементов $v$-адического поля $k_v$ с простым идеалом $\mathfrak{P}_v$, $S$ — конечное множество неэквивалентных нормирований поля $k$, содержащее все бесконечные нормирования.

Для $k$-определенной алгебраической группы $G$ через $G_A$ обозначается группа аделей, через $G_k$ — подгруппа главных аделей. Группа $G_S = \prod\limits_{v \in S} G_{k_v}$ отождествляется с подгруппой $G_A$, у которой все $v$-компоненты $(v \notin S)$ равны 1. $\pi_S\colon G_A \to G_S$ — каноническая проекция.

Проблема сильной аппроксимации в алгебраических группах, восходящая к Эйхлеру и Шевалле, состоит в следующем: когда $\overline{G_S G_k} = G_A$, где черта означает замыкание в локально компактной адельной топологии? Или в эквивалентной форме: когда для любых $v_i \notin S$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $a_{v_i} \in G_{k_{v_i}}$ и положительных целых $m_{v_i}$ имеет решение в группе $G_k$ система сравнений

$$x \equiv a_{v_i} (\operatorname{mod} \mathfrak{P}_{v_i}^{m_{v_i}}),$$

где $x \in G_{O_v}$ для $v \notin S \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$?

Если $\overline{G_S G_k} = G_A$, то говорят, что $G$ обладает свойством сильной аппроксимации относительно $S$ или свойством абсолютно сильной аппроксимации, если $S = \{\infty\}$.

Проблема сильной аппроксимации имеет многочисленные связи с различными арифметическими вопросами алгебраических групп и целочисленных представлений [см. (2) — (8)].

Первым важным результатом о проблеме сильной аппроксимации была классическая теорема Эйхлера (1), устанавливающая сильную аппроксимацию в группе $G$, для которой $G_k \cong SL(n, D)$, где $D$ — тело конечного $k$-ранга. Исключения доставляет лишь случай, когда $n = 1, D$ — тело вполне определенных кватернионов. Им же была доказана теорема о сильной аппроксимации для спинорной группы неопределенной квадратичной формы ([2]).

Затем Кнезер ([3]) нашел необходимые условия для существования сильной аппроксимации:

1) группа $G$ односвязна как алгебраическая группа;

2) группа $G_S$ некомпактна.

В этой же работе он редуцировал проблему о сильной аппроксимации к случаю простой алгебраической группы $G$, а также показал, что указанные условия являются достаточными для классических групп.

Наконец, в ([4]) Кнезер дал набросок доказательства для простых алгебраических групп $G$, исключая группы типа $E_8$. Его доказательство носит когомологический характер и использует когомологии Галуа. Оно непосредственно зависит от справедливости принципа Хассе, т. е. инъективности отображения $H^1(k, G) \to \prod\limits_v H^1(k_v, G)$. Как известно, принцип Хассе доказан для всех типов групп $G$, кроме $E_8$ (кстати, доказательство принципа Хассе, известное в настоящее время, заключается в довольно громоздком исследовании каждого из особых типов алгебраических групп).

Цель настоящей статьи — доказательство теоремы о сильной аппроксимации в общем случае.

Метод доказательства отличен от ([4]) и представляет некоторое усовершенствование метода первой работы Кнезера ([3]) в сочетании с доказательством для $v$-адического случая известной гипотезы Кнезера — Титса ([9]): если $G$ — $k_v$-простая односвязная $k_v$-изотропная группа, то $G_{k_v}$ порождается унипотентными элементами. С учетом результатов ([9]) это эквивалентно следующему утверждению: группа $G_{k_v}/C(G_{k_v})$, где $C(G_{k_v})$ — центр группы $G_{k_v}$, является простой в абстрактном смысле.

Сформулируем главные результаты в виде двух теорем.

ТЕОРЕМА А. *Пусть $G$ — простая односвязная алгебраическая группа, для которой группа $G_S$ некомпактна. Тогда $G$ обладает свойством сильной аппроксимации относительно $S$.*

Доказательство теоремы А редуцируется к доказательству следующей теоремы.

ТЕОРЕМА В. *Если простая односвязная группа $G$ определена и изотропна над $k_v$, то фактор-группа $G_{k_v}/C(G_{k_v})$ является простой в абстрактном смысле.*

На самом деле доказательство теоремы В сохраняется и для случая функционального $v$-адического поля $k_v$, т. е. для пополнения поля $k$ алгебраических функций одной переменной над конечным полем констант, если учесть классификационные результаты Брюа и Титса [17], обобщающие результаты Кнезера ([18]) для числового случая.

Это позволяет решить проблему сильной аппроксимации также для таких групп $G$ над функциональным полем $k$, для которых выполняется редукция доказательства теоремы А к теореме В*.

* Примечание при корректуре. Доказательство теоремы А аналогично и для функциональных полей.

Во всяком случае, из теоремы В и того факта, что $\overline{G_k}$ является подгруппой конечного индекса в $G_S$ для любой $k$-определенной полупростой алгебраической группы $G$ ([20]), следует теорема о слабой аппроксимации:

*если $G$ — простая односвязная группа над функциональным полем $k$, то* $\overline{\pi_S(G_k)} = G_S$.

## § 2. Доказательство теоремы В

Предлагаемое ниже доказательство опирается на классификационные результаты для $v$-адических полей (см. ([12]) или ([18]), а также ([17]) для функционального случая) и использует основные структурные факты об односвязных группах [([16]), ([24])].

2.1. Разложимые группы. Для $k_v$-разложимой группы $G$ над произвольным бесконечным полем $k_v$ (не обязательно $v$-адическим) теорема В вытекает из классических результатов Шевалле ([15]), ([16]), который показал, что если $G^u_{k_v}$ — подгруппа $G_{k_v}$, порожденная унипотентными элементами, то для всякого $g \in G_{k_v} \Rightarrow g^m \in G^u_{k_v}$, где $m$ — порядок ядра односвязного накрытия $\pi$: $\widetilde{G} \to G$.

В частности, $m = 1$ при $G = \widetilde{G}$.

2.2. Квазиразложимые группы. Результаты Шевалле были обобщены Стейнбергом ([23]) на квазиразложимые группы (т. е. группы, обладающие $k_v$-определенной борелевской подгруппой), что позволяет доказать теорему В для квазиразложимых групп.

2.3. Классические группы. Известно [см. ([12]), ([18]) или ([26])], что в этом случае для $G_{k_v}$ имеются с точностью до изоморфизма следующие возможности:

1) $G_{k_v} = SL(n, T)$, $n \geqslant 2$, где $T$ — тело конечного ранга над $k_v$, а $SL$ обозначает группу матриц из $GL(n, T)$ с приведенной нормой над $k_v$, равной 1.

В этом случае известно, что $SL(n, T)$ совпадает с подгруппой $GL(n, T)$, порожденной трансвекциями ([25]), в частности, справедлива теорема В.

2) $G_{k_v} \approx \widetilde{SU(f, D)}$, где $\widetilde{SU(f, D)}$ — односвязная накрывающая специальной унитарной группы невырожденной эрмитовой или косоэрмитовой формы $f$ индекса $\nu \geqslant 1$ над телом $D$ с инволюцией $\sigma$, причем для $D$, в свою очередь, имеются такие возможности:

$2_a$) $[D : k_v] = 1$; тогда $G_{k_v} = \mathrm{Spin}(f, D)$ или $\mathrm{Sp}(f, D)$.

Утверждение теоремы В для спинорной и симплектической групп хорошо известно [см. ([2]), ([21])].

$2_b$) $[D : k_v] = 2$, $G_{k_v} = SU(f, D)$, где $k_v = (d \in D \mid \sigma(d) = d) = D^\sigma$. Тогда $SU(f, D)$ порождается унипотентными элементами [см. ([12]), гл. 6].

$2_c$) $[D : k_v] = 4$, где $D$ — тело обобщенных кватернионов, $\sigma$ — инволюция первого рода, $f$ — эрмитова форма.

Если $\dim_{k_v} D^\sigma = 1$, то $G_{k_v} = SU(f, D)$ порождается унипотентными элементами [([22]), гл. 7].

Осталось рассмотреть случай $\dim_{k_v} D^\sigma = 3$ и $G_{k_v} = \widetilde{SU(f, D)}$. Это одна из форм групп типа $D_n$. Непосредственное доказательство в этом случае не получено и мы рассмотрим его отдельно.

Метод, который будет использован при этом, носит общий характер и может быть применен к группам произвольного типа.

2.4. Группы типа $D_n$ и общий случай. В предыдущем пункте теорема В доказана для групп $G$ типа $A_n$, $B_n$, $C_n$.

Здесь будет рассмотрен случай групп типа $D_n$, $n \geqslant 4$. Метод доказательства годится на самом деле для произвольного случая и представляет собой естественную редукцию к классическим группам малых размерностей типа $A_m$, которая основывается на анализе схем-индексов простых групп в сочетании со следующим общим фактом: пусть $H$ — максимальный $k_v$-разложимый подтор группы $G$, $F = Z_G(H)$ — его централизатор; тогда

$$G_{k_v} = G^u_{k_v} \Leftrightarrow F_{k_v} \cap G^u_{k_v} = F_{k_v}$$

[см. ([9]); ([19]), 6.26].

Группа $F = \Delta\hat{H}$, где $\Delta$ — полупростое анизотропное ядро, а $\hat{H}$ — центральный $k_v$-определенный подтор. Из односвязности $G$ следует, что $\Delta$ — также односвязная группа [см. ([16]), сообщение 22—24, или ([24])]. Если $\Delta \cap \hat{H} = (e)$, то $F_{k_v} = \Delta_{k_v}\hat{H}_{k_v}$ и достаточно доказать, что $\Delta_{k_v} \subset G^u_{k_v}$ и $\hat{H}_{k_v} \subset G^u_{k_v}$.

В большинстве случаев $\hat{H} = H$ и тогда $H_{k_v} \subset G^u_{k_v}$, так как $H$ содержится в односвязной разложимой полупростой подгруппе [см. ([19]), § 7].

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — простые корни группы $G$ относительно максимального тора $T \supseteq H$, $r = \dim H$, $h_{\alpha_i}(t_i)$ — соответствующие подгруппы из $T$. Тогда при $\hat{H} = H$ тор $T = \prod\limits_{i=1}^{n} h_{\alpha_i}(t_i)$, $H = \prod\limits_{i=1}^{r} h_{\alpha_i}(t_i)$, где произведения прямые, ввиду односвязности $G$ ([24]). В частности, если $\hat{H} = H$, то $\Delta \cap H = (e)$.

В тех случаях, когда выполнение условия $\hat{H} = H$ не доказано, применяем более общий прием, который можно назвать процедурой «выбрасывания выделенных вершин». Упоминание об этом имеется в ([12]) и сущность этой процедуры состоит в следующем. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — некоторые из выделенных вершин в схеме-индексе группы $G$ [см. ([12]), ([19])]. Через $h_{\alpha_i}(t_i)$ обозначим соответствующие однопараметрические подгруппы $k_v$-разложимого тора $H$. Можно рассмотреть ту схему, которая остается после выбрасывания вершин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ вместе с их связями. Получается схема-индекс полупростой группы $\hat{\Delta} = D^1\left(Z_G\left(\prod\limits_{i=1}^{k} h_{\alpha_i}(t_i)\right)\right)$, где $D^1$ обозначает коммутатор группы $R = Z_G\left(\prod\limits_{i=1}^{k} h_{\alpha_i}(t_i)\right)$. Если $H^{(k)} = \prod\limits_{i=1}^{k} h_{\alpha_i}(t_i)$, то $R = Z_G(H^{(k)}) = \hat{\Delta}\hat{H}^{(k)}$, где $\hat{H}^{(k)}$ — некоторый центральный тор.

Мы будем подбирать $k$ так, чтобы выполнялись условия $\hat{H}^{(k)} = H^{(k)}$. Тогда $\hat{\Delta}_{k_v} H^{(k)}_{k_v} = R_{k_v}$ и, ввиду того, что $F = Z_G(H) \subseteq R$, достаточно доказать включение $\hat{\Delta}_{k_v} \subset G^u_{k_v}$. В основном можно ограничиться случаем $k = 1$.

Для групп $G$ большого относительного $k_v$-ранга, как правило, простые $k_v$-компоненты $\hat{\Delta}_{k_v}$ оказываются изотропными типа $A_m$.

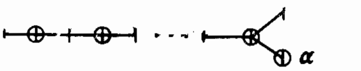
Для групп $G$ малого относительного ранга используется естественная процедура рассмотрения $k_v$-изотропных подсхем, т. е. процедура добавления выделенных вершин к неизотропным компонентам группы $\hat{\Delta}$.

В дальнейшем используются обозначения из ([12]).

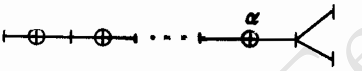
2.5. Группы типа $D_n$. Прежде всего укажем, что согласно пункту 2.2 теорема В верна для форм типа ${}^3D^2_{4,2}$ и ${}^6D^2_{4,2}$, ибо они квазиразложимы.

При рассмотрении остальных форм типа $D_n$ мы можем ограничиться случаем некоммутативного тела $D$ (п. 2.3).

Схема-индекс групп типа ${}^1D^{(2)}_{n,r}$ ($n$ — абсолютный, $r$ — относительный ранги) имеет следующий вид:



, если $n = 2r$;



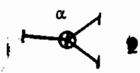
, если $n = 2r + 3$.

Выбросим вершину $\alpha$. Тогда легко видеть, что $R = Z_G(h_\alpha(t)) = h_\alpha(t)\,\Delta$, где $h_\alpha(t) \cap \Delta = (e)$, $\Delta \cong A_{n-1}$ в первом случае и $\Delta \cong A_{n-4} \times A_3$ — во втором, причем все компоненты определены над $k_v$.

Как указывалось в пункте 2.4, достаточно установить включение $\Delta_{k_v} \subset G^u_{k_v}$. В первом случае группа $A_{n-1}$ $k_v$-изотропна. Во втором добавляем к $A_{n-4}$ и $A_3$ соответственно вершину $\alpha$, тогда получаем $k_v$-изотропные группы типа $A_{n-3}$ и $D_4$.

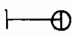
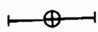
Для компоненты $A_{n-3}$ теорема В следует из пункта 2.3, в частности, $A^{k_v}_{n-4} \subset G^u_{k_v}$ в смысле изоморфизма.

Что касается групп типа $D_4$, то осталась нерассмотренной только форма вида

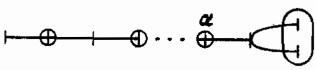



которую Титс обозначает ${}^1D^{(2)}_{4,1}$.

Процедура выбрасывания вершины $\alpha$ показывает, что в этом случае полупростое анизотропное ядро $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$, $\Delta_1 \cong A_1$, $\Delta_2 \cong A_1 \times A_1$, где $\Delta_1$ и $\Delta_2$ являются $k_v$-определенными.

Но $\Delta_1$ содержится в $k_v$-определенной односвязной подгруппе типа $A_2$, соответствующей схеме ; $\Delta_2$ содержится в $k_v$-определенной односвязной подгруппе типа $A_3$, соответствующей схеме  .

Осталось рассмотреть группы типа ${}^2D^{(2)}_{n,r}$, где $n = 2r + 1$ и схема-индекс имеет вид:



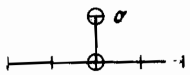
.

Процедура выбрасывания вершины $\alpha$ и в этом случае редуцирует доказательство теоремы В к группам типа $A_m$.

Таким образом, для классических групп теорема В доказана.

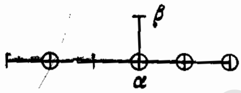
2.6. Группы типа $E_8$, $F_4$, $G_2$. Для групп указанных типов теорема немедленно следует из 2.1, если учесть, что они $k_v$-разложимы [(12), (18)].

2.7. Группы типа $E_6$. Группа $G$ типа $E_6$, не являющаяся квазиразложимой над $k_v$, имеет следующую схему-индекс:




Процедура выбрасывания вершины $\alpha$ сводит доказательство к группам типа $A_5$.

2.8. Группы типа $E_7$. Существует одна неразложимая группа $G$ типа $E_7$ со схемой




Выбрасывание вершины $\alpha$, а затем добавление ее к $\beta$ редуцирует доказательство к группам типа $A_2$ и $A_3$.

2.9. Доказательство теоремы В получается теперь объединением результатов пунктов 2.3—2.8.

## § 3. Доказательство теоремы А

3.1. Не ограничивая фактически общности (3), мы будем доказывать теорему А для случая $k = Q$, $k_v = Q_p$, где $Q$ — поле рациональных чисел, $p$ — произвольное простое число.

Мы рассматриваем также для упрощения рассуждений тот основной случай, когда $S = \{\infty\}$, т. е. случай абсолютно сильной аппроксимации. При $S \neq \{\infty\}$ доказательство обобщается очевидным образом.

Пусть $V$ — произвольное конечное множество простых чисел. Через $Z(V)$ обозначим кольцо таких рациональных чисел, простые делители знаменателей которых принадлежат $V$.

Как обычно, $G_V = \prod\limits_{p \in V} G_p$, $Z$ — кольцо целых чисел.

В дальнейшем, как мы условились выше, $G$—простая односвязная $Q$-определенная группа, группа $G_\infty$ вещественных точек которой некомпактна, $G_p = G_{Q_p}$.

Впрочем, в двух следующих предложениях односвязность $G$ не требуется.

3.2. Предложение. $\overline{\pi_V(G_Z)}$ — *открытая компактная подгруппа группы* $G_V$.

Доказательство. Компактность $\overline{\pi_V(G_Z)}$ очевидна и достаточно доказать, что она является открытой подгруппой $G_V$.

Покажем сначала, что $\overline{\pi_p(G_Z)}$ — открытая подгруппа $G_p$. Так как группа $G_\infty$ некомпактна, то по теореме плотности Бореля ([10]) $G_Z$ и всякая ее подгруппа конечного индекса плотны в $G$ относительно топологии Зарисского. В частности, подгруппа $G_Z$ бесконечна. Так как $\overline{\pi_p(G_Z)}$ — замкнутая подгруппа $p$-адической группы Ли $G_p$, то она также является $p$-адической группой Ли и алгебра Ли $L(\overline{\pi_p(G_Z)})$ группы $\overline{\pi_p(G_Z)}$ является подалгеброй алгебры Ли $L(G_p)$ группы $G_p$ [см. ([13])].

Ввиду бесконечности $G_Z$, $L(\overline{\pi_p(G_Z)})$ — ненулевая подалгебра алгебры Ли $L(G_p)$. Покажем, что

$$L(\overline{\pi_p(G_Z)}) = L(G_p).$$

Пусть $A(\overline{\pi_p(G_Z)})$ — минимальная алгебраическая подалгебра алгебраической алгебры Ли $L(G_p)$, содержащая $L(\overline{(\pi_p)(G_Z)})$. Через $\mathrm{Alg}(\overline{\pi_p(G_Z)})$ обозначим связную алгебраическую подгруппу группы $G_p$, соответствующую алгебре $A(\overline{\pi_p(G_Z)})$. По построению, имеем локальное включение $\overline{\pi_p(G_Z)} \subset \mathrm{Alg}(\overline{\pi_p(G_Z)})$. Следовательно, в $\mathrm{Alg}(\overline{\pi_p(G_Z)})$ содержится такая подгруппа $F$ группы $G_Z$, что $[G_Z : F] < \infty$. Тогда по теореме плотности Бореля, цитированной выше, замыкание $F$ в топологии Зарисского есть $G$. В частности,

$$\mathrm{Alg}(\overline{\pi_p(G_Z)}) = G_p \text{ и } L(G_p) = A(\overline{\pi_p(G_Z)}).$$

Но $L(\overline{\pi_p(G_Z)})$ — идеал в $A(\overline{\pi_p(G_Z)})$ [см. ([14]), стр. 240]. Тогда, учитывая простоту алгебры Ли $L(G_p)$, имеем:

$$A(\overline{\pi_p(G_Z)}) = L(\overline{\pi_p(G_Z)}).$$

Из последнего равенства следует локальное совпадение групп $\overline{\pi_p(G_Z)}$ и $G_p$. Значит, $\overline{\pi_p(G_Z)}$ открыта в $G_p$. Рассмотрим теперь общий случай. Очевидно, что

$$\overline{\pi_V(G_Z)} \subseteq \prod_{p \in V} \overline{\pi_p(G_Z)},$$

где $\pi_p(\overline{\pi_V(G_Z)}) = \overline{\pi_p(G_Z)}$.

Всякая компактная подгруппа группы $G_p$ содержит подгруппу конечного индекса, являющуюся про-$p$-группой. Следовательно, для подходящей подгруппы $H \subset G_Z$, $[G_Z : H] < \infty$, $\overline{\pi\ (H)}$ — про-$p$-группа для всех $p \in V$.

Таким образом, $\pi_p(\overline{\pi_V(H)}) = \overline{\pi_p(H)}$ — про-$p$-группа. Так как непрерывный гомоморфный образ про-$p$-группы снова является про-$p$-группой, то легко видеть, что на самом деле пронильпотентная группа

$$\overline{\pi_V(H)} = \prod_{p \in V} \overline{\pi_p(H)}.$$

Выше было доказано, что $\overline{\pi_p(H)}$ открыта в $G_p$. Следовательно, $\overline{\pi_V(H)}$ открыта в $G_V$. Предложение доказано.

3.3. Предложение. *Подгруппа* $\overline{\pi_V(G_{Z(V)})}$ *имеет конечный индекс в* $G_V$.

Доказательство. По редукционной теореме Бореля для групп $V$-единиц [(11), § 8] следует, что

$$G_V = BG_{Z(V)},$$

где $B$ — компактное множество.

Значит, фактор-пространство $G_V/\overline{\pi_V (G_{Z(V)})}$ компактно. Но из предложения 3.2 следует, что $\overline{\pi_V (G_{Z(V)})}$ — открытая подгруппа в $G_V$.

Таким образом, $G_V/\overline{\pi_V (G_{Z(V)})}$ — конечное множество.

3.4. Доказательство теоремы А. Нетрудно видеть, что свойство сильной аппроксимации эквивалентно равенству

$$\overline{\pi_V (G_{Z(V)})} = G_V$$

для всех $V$.

Пусть сначала $G_Q \cong SL(1, D)$, где $D$ — тело конечного $Q$-ранга. Тогда можно применить рассуждение Эйхлера (3).

Основной случай: $G_Q \not\cong SL(1, D)$. Тогда все группы $G_p$ изотропны (18). По теореме В они не содержат подгрупп конечного индекса. Это же верно и для групп $G_V$. Отсюда и из предложения 3.3 следует, что $\overline{\pi_V (G_{Z(V)})} = G_V$. Теорема А доказана.

3.5. Для полноты доказательства теоремы А покажем, как предыдущие рассуждения обобщаются на случай произвольного $S$.

Как и выше, можно считать, что $G \not\cong SL(1, D)$; тогда все группы $G_p$ изотропны. Обозначим $T = S \setminus \{\infty\}$. Тогда группа $G_{Z(T)}$ бесконечна ввиду некомпактности $G_S$ и конечности объема $G_S/\pi_S (G_{Z(T)})$. Пусть

$$V \cap S = \emptyset, \quad P = V \cup T.$$

Утверждается, что $\overline{\pi_V (G_{Z(T)})}$ — открытая компактная подгруппа в группе $G_V$. Доказательство совершенно аналогично доказательству предложения 3.2, если учесть, что $G_{Z(T)}$ плотна в $G$ относительно топологии Зарисского.

Из предложения 3.3 следует тогда, что $\overline{\pi_V (G_{Z(P)})}$ — открытая подгруппа конечного индекса в $G_V$. Применение теоремы В завершает доказательство для произвольного $S$.

Поступило
5.V.1969

ЛИТЕРАТУРА

1 Eichler M., Allgemeine Kongruenzklassenenteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre $L$-Reihen, J. Reine Angew. Math., 179 (1938), 227—251.

2 Eichler M., Quadratische Formen und ortogonale Gruppen, Berlin, 1952.

3 Kneser M., Starke Approximation in algebraischen Gruppen. I, J. Reine Angew. Math., 218 (1965), 190—203.

4 Kneser M., Starke Approximation, Proc. Symp. Pure Math., vol. 9, Providence (1966), 187—197.

5 Kneser M., Einfach zusammenhängende algebraische Gruppen in der Arithmetik, Int. Cong. Math., Stockholm, 1962.

6 Shimura G., Arithmetic of unitary groups, Ann. Math., 79 (1964), 369—409.

[7] Bass H., Milnor J., Serre I.-P., Solution of the congruence subgroup problem for $SL_n$ and $Sp_{2n}$, Publ. Math., I.H.E.S., 33 (1967), 59—137.

[8] Платонов В. П., Группы аделей и целочисленные представления, Изв. АН СССР, серия матем., 33 (1969), 155—163.

[9] Tits J., Abstract and simple groups, Ann. Math., 80, № 2 (1964), 313—329.

[10] Borel A., Density and maximality of arithmetic subgroups, J. Reine Angew. Math., 224 (1966), 78—89.

[11] Borel A., Some finiteness properties of adele groups over number fields, Publ. Math. I.H.E.S., 16 (1963), 101—126.

[12] Tits J., Classification of algebraic semisimple groups, Proc. Symp. Pure Math., vol. 9, Providence (1966), 33—63.

[13] Lazard M., Groupes analytiques $p$-adiques, Publ. Math. I.H.E.S., 26 (1965), 5—219.

[14] Шевалле К., Теория групп Ли, т. 2, М., ИЛ, 1958.

[15] Chevalley C., Sur certains groupes simples, Tohoku Math. J., 7 (1955), 14—66.

[16] Chevalley C., Seminaire sur la classification groupes de Lie algebriques, ENS, Paris, 1958.

[17] Bruhat F., Tits J., Groupes algebriques simples sur un corps local, C. R. Acad. Sci., Paris, 263, № 23 (1966), 867—869.

[18] Kneser M., Galois Kohomologie halbeinfacher algebraischen Gruppen über $p$-adischen Körpern. I—II, Math. Z., 88 (1965), 40—47; 89 (1965), 250—272.

[19] Borel A., Tits J., Groupes reductifs, Publ. Math. I.H.E.S., 27 (1965), 55—152.

[20] Harder G., Eine Bemerkung zum schwachen Approximationssatz, Archiv Math., XIX, 5 (1968), 465—472.

[21] Dieudonne J., La geometrie des groupes classiques, Berlin, 1963.

[22] Dieudonne J., Sur les groupes classiques, Paris, 1967.

[23] Steinberg R., Variations on a theme of Chevalley, Pac. J., Math., 9 (1959), 875—891.

[24] Steinberg R., Generateurs, relations et revetement de groupes algebriques, Colloque Bruxelles (1962), 113—127.

[25] Wang S., On the commutator group of a simple algebra, Amer. J. Math., 72, № 2 (1950), 323—334.

[26] Weil A., Algebras with involutions and the classical groups, J. Ind. Math. Soc., 24 (1961), 589—623.